Leçon n° 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie. Sous-groupes de GL(E). Applications.

Dans toute la suite on prendra $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$.

I/ Généralités sur le groupe linéaire. [PER] [ROM] [FGNAlg2]

Définition 1 : Définition du groupe linéaire.

Remarque 2 : Si $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe un isomorphisme non canonique entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'intérêt est de fournir un outil pour le calcul matriciel.

Proposition 3 : Le déterminant est un morphisme de groupe, on définit $\mathrm{SL}(E)$.

Remarque 4 : Comme précédemment, $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes non canoniquement.

Proposition 5 : Définitions équivalentes d'une dilatation.

Remarque 6 : Définition des matrices de dilatation.

Proposition 7 : Définitions équivalentes d'une transvection.

Remarque 8 : Définition des matrices de transvection.

Développement 1.a)

Théorème 9 : Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 10 : Les transvections et dilatations engendrent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Application 11 : (Algorithme du pivot de Gauss et opérations élémentaires) + complexité.

Proposition 12 : (Comportement par conjugaison).

Proposition 13 : Deux dilatations sont conjuguées ssi elles ont même rapport.

Proposition 14 : Deux transvections quelconques sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$. Et si $n \geq 3$ elles le sont aussi dans $\mathrm{SL}(E)$.

II/ Étude des groupes GL(E) et SL(E).

A/ Centres et groupes dérivés. [PER]

Lemme 15 : Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ laissant stable toute droite sont les homothéties.

Proposition 16 : Centre de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$.

Proposition 17 : Groupe dérivé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

B/ Cardinaux et isomorphismes exceptionnels. [PER] [CAL]

Définition 18 : Groupes projectifs linéaires (et spécial linéaire).

Proposition 19 : L'action du groupe projectif sur les droites est fidèle.

Proposition 20 : Cardinaux des différents objets.

Théorème 21 : Isomorphismes exceptionnels.

Développement 2

Théorème 22 : Dénombrement des endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{F}_q^n$.

C/ Matrices et permutations. [ROM] [OBJ]

Définition 23 : Matrices de permutation.

Proposition 24 : Morphismes entre $\mathfrak{S}_n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 25 : Tout groupe fini d'ordre $n \geq 1$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ où p est premier.

Théorème 26 : Frobenius-Zolotarev.

D/ Groupe orthogonal. [BER] [ROM] [CAL]

Définition 27 : Groupe orthogonal et groupe unitaire.

Proposition 28 : Ce sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$.

Définition 29 : Isométrie directe et groupe spécial orthogonal.

Proposition 30 : Si u est une isométrie (dans $\mathbb{R}$) alors il existe des espaces de dimension au plus 2 en somme directe stables par u.

Théorème 31 : (Réduction des isométries).

Théorème 32 : Décomposition polaire.

III/ Autres résultats sur $\mathrm{GL}(E)$.

A/ Actions de groupes matriciels. [ROM]

Proposition 33 : Action $(P, A) \mapsto PA$ et orbites.

Proposition 34 : Action $(P, A) \mapsto AP^{-1}$ et orbites.

Proposition 35 : Action de Steinitz (par équivalence) et orbites.

Proposition 36 : Action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les espaces vectoriels de dimension k permettant de dénombrer cet ensemble si E et $\mathbb{K}$ sont finis.

B/ Topologie du groupe linéaire [ROM] [FGNAlg2]

On se place ici dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 37 : $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 38 : $\mathrm{GL}(E)$ est dense et $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Proposition 39 : $\mathrm{SL}(E)$ est fermé.

Proposition 40 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Développement 1.b)

Proposition 41 : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Proposition 42 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe mais admet deux composantes connexes $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Références :

— [PER] Perrin p. 95
— [ROM] Rombaldi Algèbre 2nd éd. p. 139, p. 183 et p. 407
— [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 251
— [CAL] Caldéro Nouvelles Histoires hédonistes tome 1 p. 347 et Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250
— [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 177